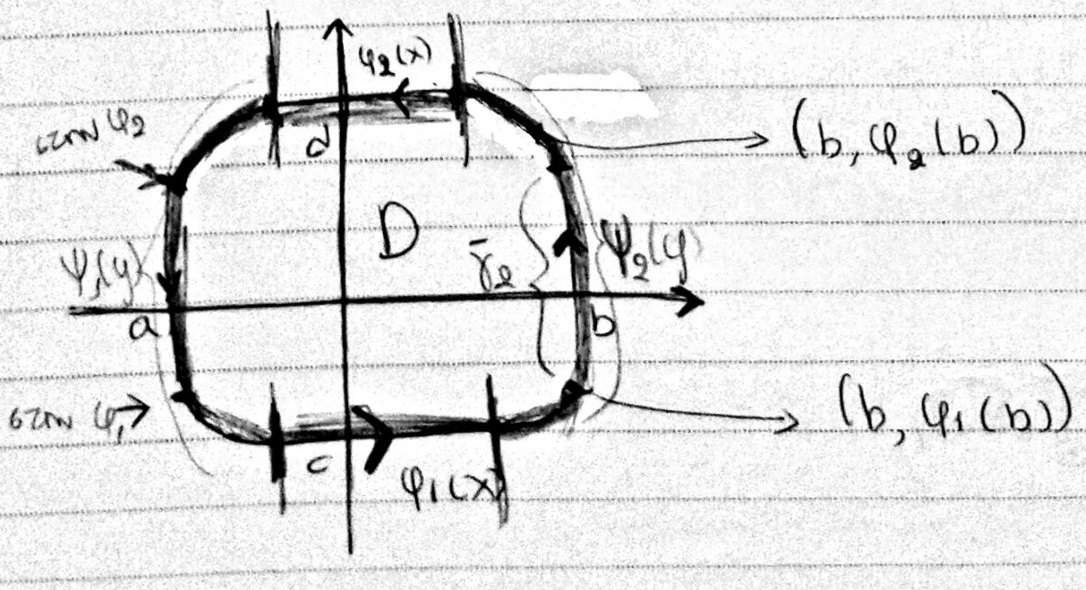
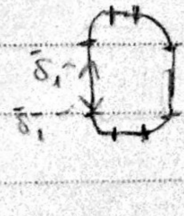
20/05/2017

Μάθημα
Ανάλ 4

Θεώρημα Green: Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ένα C^1-κανονικό χωρίο
(δηλ. κανονικό χωρίο ως προς Ox:
$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b] , \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \}$
όπου $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς, όπου (για να το λέμε
C^1 - κανονικό χωρίο) οι φ_1, φ_2 θα είναι κατά τμήματα C^1
[[δηλ. υπάρχει διαμέριση του $[a,b]$, έτσι ώστε οι περιορισμοί
στα υποδιαστήματα των φ_1, φ_2 να είναι C^1]]
και, αντίστοιχα, ως προς Oy,
$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c,d] , \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \}$
όπου ...)
Έστω ∂D να είναι θετικά προσανατολισμένο. Έστω $U \subset \mathbb{R}^2$
ανοικτό με $D \subset U$ και $(\bar{f} =) (f_1, f_2) : U \to \mathbb{R}^2$ ένα διανυσματικό πεδίο C^1 ($\Leftrightarrow$ συνεχώς διαφορίσιμο). Τότε:

$$\int_{\partial D} (f_1, f_2) \cdot d(x,y) = \iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) d(x,y)$$





Θεμελιώδης Θεώρημα
Απειροστικού Λογισμού

Απόδειξη (τελευταία φορά) μέσω ΘΘΑ.Λ.

$$\int_D \left(\frac{d f_2}{dx} - \frac{\partial f_1}{dy} \right) d(x,y) =$$

$$= \int_c^d \left(f_2(\psi_2(y), y) - f_2(\psi_1(y), y) \right) dy -$$

$$- \int_a^b \left(f_1(x, \varphi_2(x)) - f_1(x, \varphi_1(x)) \right) dx$$

Από την άλλη, αφού το D είναι κανονικό χωρίο με θετικό προσανατολισμό ∂D μπορούμε να παραμετρικοποιήσουμε

$\partial D = \bar{\gamma}([t_1, t_2])$ $[[\bar{\gamma}_1(x) = (x, \varphi_1(x)), x \in [a,b]]]$

με $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_1 \oplus \bar{\gamma}_2 \oplus \bar{\gamma}_3^- \oplus \bar{\gamma}_4^-$

$\bar{\gamma}_1(t) = (t, \varphi_1(t)), \ t \in [a,b]$

Το ίδιο απλά αλλάζει η μεταβλητή

$$\bar{\gamma}_2(t) = (b, \varphi_1(b)) + t\,\underbrace{\left((b, \varphi_2(b)) - (b, \varphi_1(b)) \right)}_{= (0,\ \varphi_2(b) - \varphi_1(b))}, \ t \in [0,1]$$

$\bar{\gamma}_3(t) = (t, \varphi_2(t)) \quad t \in [a,b]$

$\bar{\gamma}_3'(t) = (1, \varphi_2'(t))$ → πηγαίνουν όλες προς την ίδια κατεύθυνση.

$\bar{\gamma}_4(t) = (a, \varphi_1(a)) + t\,(a, \varphi_2(a) - (a, \varphi_1(a)))$

Επίσης, $\partial D = \bar{\delta}([t_3, t_4])$

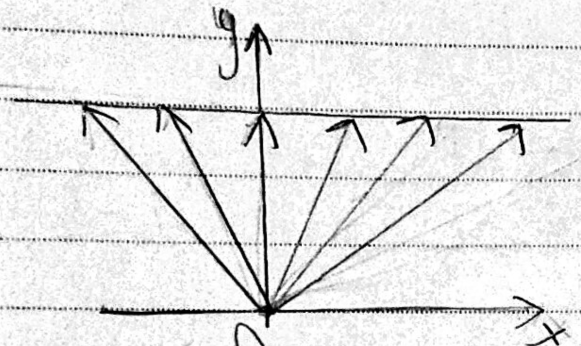
$\bar{\delta}_1(t) = (\psi_1(t), t) \quad , t \in [c,d]$

$\bar{\delta} = \bar{\delta}_1^- \oplus \bar{\delta}_2 \oplus \bar{\delta}_3 \oplus \bar{\delta}_4^-$

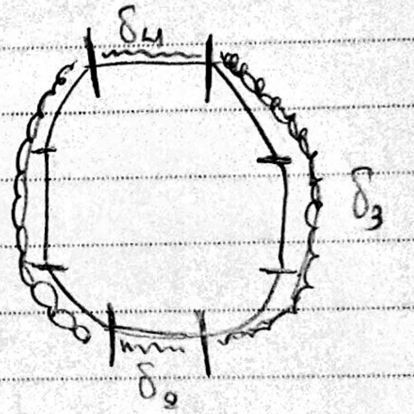
$$\bar{\delta}_2(t) = (\psi_1(c), c) + t\big(\underbrace{(\psi_2(c), c) - (\psi_1(c), c)}_{= (\psi_2(c) - \psi_1(c), 0)}\big)$$

$$\bar{\delta}_3(t) = (\psi_2(t), t), \quad t \in [c, d]$$

$$\bar{\delta}_4(t) = (\psi_1(d), d) + t\big(\underbrace{(\psi_2(d), d) - (\psi_1(d), d)}_{= (\psi_2(d) - \psi_1(d), 0)}\big), \quad t \in [0,1]$$



σταθερό το y



Με αυτές τις παραμετρικοποιήσεις του θετικού προσανατολισμού ∂D έχουμε $\int_{\partial D} (f_1, f_2) \cdot d(x,y) =$

$$= \underbrace{\int_{\partial D} (f_1, 0) \cdot d(x,y)}_{(*)} + \underbrace{\int_{\partial D} (0, f_2) \cdot d(x,y)}_{(**)}$$

$$(*) = \int_a^b \underbrace{\left(f_1(\bar{\gamma}_1(t)), 0\right) \cdot \bar{\gamma}_1'(t)}_{\substack{\| \\ f_1(t,\, \varphi_1(t))}} dt + \int_0^1 \overbrace{\left(f_1(\bar{\gamma}_2(t), 0\right) \cdot \bar{\gamma}_2'(t)}^{\substack{0 \\ \|}} dt$$

$$- \int_0^1 \overbrace{\left(f_1(\bar{\gamma}_4(t), 0\right) \cdot (0, \text{κάτι})}^{= 0} dt -$$

$$- \int_a^b \underbrace{\left(f_1(\bar{\gamma}_3(t)), 0\right) \cdot \bar{\gamma}_3'(t)}_{f_1(t,\, \varphi_2(t))} dt$$

$$(**) = - \int_c^d \underbrace{\left(0, f_2(\bar{\delta}_1(t))\right) \cdot (\psi_1'(t), 1)}_{\substack{\| \\ f_2(\psi_1(t),\, t)}} dt$$

$$+ \underbrace{\int_0^1 f_2(\bar{\delta}_2(t)) \cdot dt}_{\substack{\| \\ 0}} + \int_c^d f_2(\bar{\delta}_3(t))\, dt -$$

$$- \underbrace{\int_0^1 \dots\, dt}_{\substack{\| \\ 0}}$$

$$\Rightarrow \int_{\partial D} (f_1, f_2) \cdot d(x,y) = \int_a^b \left(f_1(t, \varphi_1(t)) - f_1(t, \varphi_2(t))\right) dt +$$

$$+ \int_c^d \left(f_2(\psi_2(t), t) - f_2(\psi_1(t), t)\right) dt$$

Πόρισμα: Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$, όπως στο Θεώρημα Green με ∂D θετικά προσανατολισμένο. Τότε:

$$V(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} (-y,x)\cdot d(x,y)$$

Πόρισμα (Γενίκευση Θεωρήματος Green)

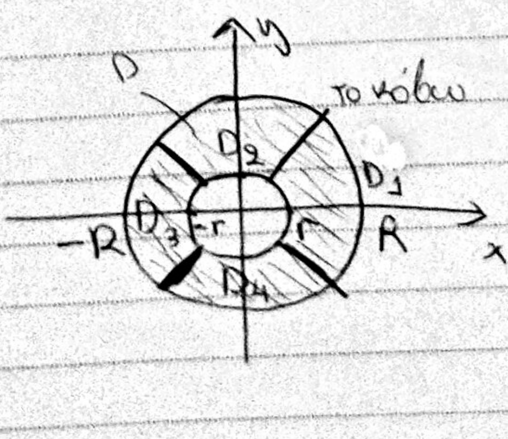
Έστω $D = \bigcup_{i=1}^{k} D_i$, $D_i \subset \mathbb{R}^2$ και D_i όπως στο Θεώρημα Green και $D_i \cap D_j = \emptyset$, $D_i \cap D_j = \partial D_i \cap \partial D_j$ $\forall i \neq j$.
Έστω επίσης $U \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό με $D \subset U$ και $(f_1, f_2) : U \to \mathbb{R}^2$ C^1. Τότε:

$$\int_{\partial D} (f_1, f_2)\cdot d(x,y) = \sum_{i=1}^{k} \int_{D_i} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) d(x,y)$$

Παράδειγμα / Άσκηση:

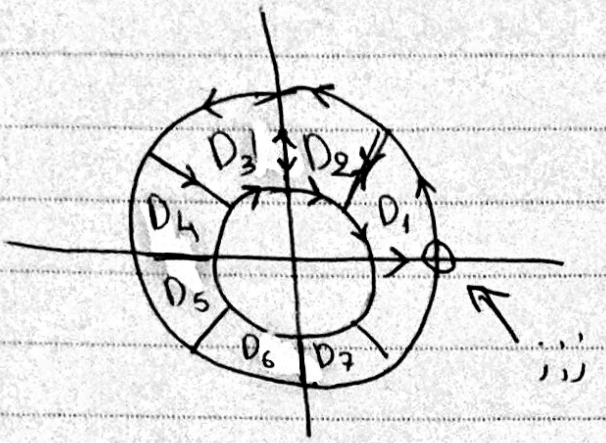
Επαληθεύστε το Θ. Green για τον δακτύλιο $D = \bar{B}((0,0),R) \setminus B((0,0),r)$ με $R > r > 0$ και το διανυσματικό πεδίο:

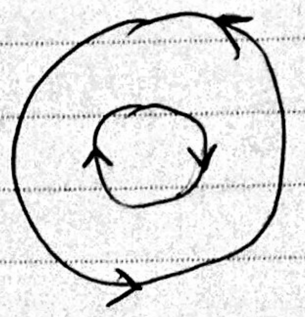
$$\bar{F}(x,y) = (2x^3 - y^3, x^3 + y^3), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$



← «κάνει» αυτή η διαμέριση του D;;;;

∂D δεξιά προσανατολισμένο





Άρα, από το Θεώρημα Green μένει να δείξουμε ότι:

$$(A) \to \int_{\partial D} \bar{F}(x,y)\cdot d(x,y) = \int_{\bar{B}((0,0),R)\setminus B((0,0),r)} \underbrace{(3x^2+3y^2)}_{= \, 3(x^2+y^2)} \, d(x,y) =$$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} 3\rho^2 \rho \, d\varphi \, d\rho - \int_0^r \dots$$

$$= \int_r^R \int_0^{2\pi} 3\rho^2 \rho \, d\varphi \, d\rho$$

$$(A) = \oint_{\partial B((0,0),R)} \bar{F}(x,y)\, d(x,y) - \int_{\partial B((0,0),r)} \bar{F}(x,y)\, d(x,y) =$$

$$= \int_0^{2\pi} \bar{F}(R\cos t, R\sin t)\cdot(-R\sin t, R\cos t)\,dt$$

$$- \int_0^{2\pi} \bar{F}(r\cos t, r\sin t)\cdot(-r\sin t, r\cos t)\,dt$$

$R^3\cos^3 t + R\sin^3 t$

$$\Rightarrow \int_{\partial D} \bar{F}(x,y)\,d(x,y) = \int_0^{2\pi} \underbrace{\left(2R^3\cos^3 t, -R^3\sin^3 t\right)\cdot\left(-R\sin t, R\cos t\right)}_{\overset{\shortparallel}{-R^4\left(2\cos^3 t \sin t + \sin^3 t \cos t\right)}}\,dt =$$

$$= R^4 \int_0^{2\pi} \ldots \, dt$$

<u>Άσκηση</u>: Υπολογίστε το εμβαδό του κυκλικού δίσκου ακτίνας $R>0$ με τη βοήθεια του Θ. Green.

<u>Λύση</u>

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\} \Rightarrow$

$\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = R^2\} \Rightarrow$

$\partial D = \bar{\gamma}([0,2\pi])$, $\bar{\gamma}(t) = (R\cos t, R\sin t)$, $t \in [0,2\pi] \Rightarrow$

$\bar{\gamma}'(t) = R(-\sin t, \cos t)$

$$V(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} (-y,x)\cdot d(x,y) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (-R\sin t, R\cos t)\cdot(-R\sin t, R\cos t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R^2 \underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_{\overset{\shortparallel}{1}}\,dt = \pi R^2$$